Primer 9.3. Neka je $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ i m Lebegova mera.

Posmatrajmo niz intervala

$$I_1 = [0,1],$$

$$I_2 = [0, \tfrac{1}{2}] \quad I_3 = [\tfrac{1}{2}, 1],$$

$$I_4 = [0, \tfrac{1}{3}], \quad I_5 = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}], \quad I_6 = [\tfrac{2}{3}, 1],$$

$$I_7 = [0, \tfrac{1}{4}], \quad I_8 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}], \quad I_9 = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}], \quad I_{10} = [\tfrac{3}{4}, 1], \ldots$$

Neka je $f_n = \kappa_{I_n}$, $n \in \mathbf{N}$, $f = 0$. Primetimo, ako je

$$n \geq \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + k$$

tada je $m(I_n) \leq \frac{1}{k}$. Važi

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f_n|^p dm \leq (\frac{1}{k})^p.$$

Dakle, $f_n \to f$ u $L^p([0,1])$.

Može se pokazati da za svako $x_0 \in [0,1]$ postoje podnizovi od $\{f_n(x_0), n \in \mathbf{N}\}$, takvi da $f_{m_n}(x_0) \to 1$ i $f_{p_n}(x_0) \to 0$ (to su konstantni podnizovi sačinjeni od samo jedinica, respektivno nula). Dakle, ni za jedno $x \in [0,1]$ niz $f_n(x)$ ne konvergira.

9.2 Konvergencija u meri.

Definicija 9.2. Niz merljivih realnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ na $(X, \mathcal{M}, \mu)$

- (KM) *konvergira u meri* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall \alpha > 0) \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

- Niz je Košijev u meri, ako za svako $\alpha > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

▲

Ako $f_n \to f$, $n \to \infty$, uniformno na X, tada za svako $\alpha > 0$ postoji $n_0(\alpha)$ tako da važi

$$n > n_0(\alpha) \Rightarrow \{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset.$$

Dakle, $(KU) \Rightarrow (KM)$.